Data Structure

Dr. Rastgoo

مرتبه اجرایی

- مجموعه محدودی از دستورالعملها که با دنبال کردن آنها هدف خاصی برآورده می شود را الگوریتم می نامند.
- در هر الگوریتم مواردی همچون ورودی، خروجی، قطعیت، محدویت و کارایی قابل بررسی می باشند.
- به علت وجود بیش از یک راه حل برای یک مسأله، الگوریتمهای متفاوتی مورد توجه قرار میگیرند که برای انتخاب یکی از آنها فاکتورهایی چون ملزومات برنامه نویسی، ملزومات عملیاتی (تأثیر زمان اجرا) و ملزومات حافظه ای را باید در نظر گرفت.

مرتبه اجرایی

- به علت مشکل بودن تجزیه و تحلیل دقیق ملزومات برنامه نویسی، تئوری پیچیدگی روی ملزومات حافظه ای و عملیاتی متمرکز میشود.

- ملزومات عملیاتی حساستر از ملزومات حافظه ای بوده و معمولاً رکن کار میباشند.

- پس میتوان عامل فضا را فدای زمان کرد، یعنی الگوریتمی پر حجم تر اما سریع تر نوشت!

نشان‌گذاری O

روشی است که اندازه‌گیری کمیتهای ملزومات عملیاتی را به گونه‌ای عمومی ممکن می‌سازد. پیچیدگی یـک الگـوریتم، تـابعی است که مدت زمان اجرای استفاده شده توسـط الگـوریتم را بـر حسـب تعـداد داده‌هـای ورودی n انـدازه می‌گیـرد. بـه طـور نمونه $o(1)$معرف زمان اجرای ثابت، $o(n)$ معرف زمان اجرای خطی و $o(n^2)$معرف زمان اجرای مربعی است.

رابطه زیر برقرار است:

$$o(1) < o(\log n) < o(n) < o(n.\log n) < o(n^2) < o(2^n) < o(n!) < o(n^n)$$

این رابطه به طور نمونه مشخص می کند که الگوریتمی با مرتبه اجرایی $o(n.\log n)$ سریعتر از الگـوریتمی بـا مرتبـه اجرایی $o(n^2)$ است.

مرتبه اجرایی تابع $f(n)$ برابر $o(n^m)$ می باشد:

$$f(n) = a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \ldots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0$$

مثال

مرتبه اجرایی تابع $f(n) = 5n^2 - 3n + 4$ کدام است؟

حل: مرتبه اجرایی تابع f برابر $o(n^2)$ می باشد، چون موثرترین عبارت n^2 می باشد یعنی از همه جملات سریع‌تر رشد می‌کند.

تذکر: تعداد تکرار حلقه زیر برابر $\left\lceil \frac{b-a+1}{k} \right\rceil$ می باشد:

```
for (i=a ; i<= b; i=i+k )
        ....
```

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1 برابر است با $o(n)$:

```
for (i=1 ;  i<=n ; i=i+1)
        x=x+1;
```

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1 را مشخص کنید.

```
for(i=2 ; i<= n-1; i=i+2 )
        x=x+1;
```

حل: حلقه $\left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil$ بار اجرا می شود، بنابراین مرتبه $o(n)$ می باشد.

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1 را مشخص کنید.

```
for ( i=2 ; i<= n; i=i+4 )
        x=x+1;
```

حل: حلقه $\left\lceil \frac{n-1}{4} \right\rceil$ بار اجرا می شود، بنابراین مرتبه $o(n)$ می باشد.

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1 را مشخص کنید.

```
for( i=0 ; i< n^2 ; i=i+2)
        x=x+1;
```

حل:حلقه $\frac{n^2}{2}$ بار اجرا می شود، بنابراین مرتبه $o(n^2)$ می باشد

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1; را بدست آورید؟

```
i= n;
while (i >=1){
    x = x+1;
    i = i % 2;
  }
```

حل:

حلقه به ازای هر n بزرگتر یا مساوی 1، یک یا دو مرتبه اجرا می‌شود.چون باقیمانده تقسیم صحیح هر عدد بر دو، یا صفر است و یا یک. بنابراین مرتبه اجرایی $O(1)$ می باشد.

تذکر: اگر به جای عدد 2 در دستور i=i % 2 ، از هر عدد دیگری نیز استفاده شود، مرتبه اجرایی باز هم $O(1)$ خواهد بود. چون تعداد اجرای حلقه به پارامتر n وابسته نمی باشد.

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1 را مشخص کنید.

```
for ( i=1 ;  i<=n ; i=i*2 )
        x=x+1;
```

حل:

چون i مقادیر ...,1,2,4,16 را می گیرد. بنابراین مرتبه اجرایی برابر $O(\log_2^n)$ یا $O(\lg n)$ می باشد.

تذکر: می توان به جای $\log_2^n$ از واژه خلاصه logn و یا lgn استفاده کرد.

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1 برابر است را مشخص کنید.

```
for( i=n ; i>1; i=i/2 )
      x=x+1;
```

حل: شمارنده i در هر بار اجرا، نصف می شود، بنابراین مرتبه $O(\lg n)$ است.

این حلقه را با دستور while نیز می توان نوشت:

```
i = n;
while( i>1) {
   x = x+1;
   i = i /2;
}
```

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1 را مشخص کنید.

```
for( i=n ; i>1; i=i/3 )
        x=x+1;
```

حل: شمارنده i در هر بار اجرا، تقسیم بر 3 می شود، بنابراین مرتبه $\log_3^n$ است.

تذکر: اگر به جای i>1 از i>0 در حلقه بالا استفاده می شد، حلقه هیچگاه تمام نمی شود، بنابراین زمان اجرا، بی نهایت می شود.

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1 را مشخص کنید.

```
for (i=1 ;  i<=n ; i++)
        x=x+1;
for (j=1 ;  j<=m ; j++)
        x=x+1;
```

حل:

حلقه اول n مرتبه و حلقه دوم m مرتبه اجرا می شود. مرتبه برابر $O(n+m)$ می باشد.

تذکر: این حلقه ها تودرتو نمی باشند.

مرتبه اجرایی حلقه های تودرتو

اگر حلقه ها تو در تو باشند، مرتبه اجرایی از ضرب مرتبه اجرایی حلقه ها بدست می آید.

```
for  ( i = 0 ; i <= 2 ; i ++) {

      .....

      for  ( j = 1 ; j < 4 ; j++ )  {
            .....
      }

      .....
}
```

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1 را مشخص کنید.

```
for( i=l ; i<=n ; i++)
  for( j=l ; j<=n ; j++)
        x=x+1;
```

حل: مرتبه اجرایی $O(n^2)$ می باشد.

مثال

مرتبه اجرایی دستور x=x+1 را مشخص کنید.(n زوج است)

```
for ( i=1 ; i<=n ; i++)
{
    for ( j=1 ; j<=n ; j++)
     {
        x=x+1;
     }
    n=n-1;
 }
```

مرتبه زمانی برابر $O(n^2)$ می باشد.

مثال

مرتبه اجرایی دستور ;x=x+1 کدام است؟

```
for (i=1;  i<= n ; i++)
   for (j=1; j<=7 i ; j++)
          x=x+1;
```

حل:

تعداد دفعات تکرار دستور x=x+1 برابر است با: $7\times\frac{n(n+1)}{2}$. بنابراین مرتبه $O(n^2)$ است.

مثال

مرتبه اجرایی دستور ;x=x+1 را مشخص کنید.

```
for (i=1 ; i<=n ; i++){
     k=n;
     while  (k >1)
      {
          k=k / 2;
          x=x+1;
        }
}
```

حـل: حلقـه for، n مرتبـه و حلقـه while، logn مرتبـه تکـرار می‌شـود و چـون حلقـه‌ها متـداخل هسـتند، مرتبـه اجرایـی $O(n.\log n)$ می باشد.

مثال

مرتبه اجرایی دستور ;x=x+1 را مشخص کنید.

```
for( i=1 ; i<=n; i++)
{
   for ( j=1 ; j<=m; j++)
          x =x+1;
   for ( k=1 ; k<=p; k++)
         x =x+1;
}
```

حل: مرتبه اجرایی for با شمارنده i برابر n ، for با شمارنده j برابر m و for با شمارنده k برابر p مـی باشـد. چـون دو حلقـه داخلی پشت سر هم می باشند(نه متداخل)، مرتبه انها با هم جمع شده و در n ضرب می شوند، چون داخل حلقه بـا مرتبـه n می باشند. بنابراین مرتبه اجرایی $O(n(m+p))$ است.

مثال

مرتبه اجرایی دستور ;x=x+1 را مشخص کنید.

```
for (i=1 ;  i<=n; i++){
    for (j=1 ;  j<=m ; j++)
         x =x+1;
    j =1;
    while( j<=n )     {
        x= x+1;
        j=3*j;
     }
}
```

حل: حلقه for اول از $O(n)$ و حلقه for دوم از $O(m)$ و حلقه while از مرتبه $O(\log_3^n)$ است.

مرتبه دو حلقه داخلی چون تو در تو نیستند، با هم جمع شده و در مرتبه حلقه for خارجی ضرب می‌شوند:

$O(n(m+\log_3^n))$

مثال

مرتبه اجرایی دستور ;x=x+1 را مشخص کنید.

```
i = n;
while(i>1){
    i =i/2;
    j =n;
    while (j>1) {
        j=j/3;
        x=x+1;
    }
}
```

حل: حلقه داخلی با تقسیم مقدار شمارنده بر 3، به صورت لگاریتمی با $O(\log_3^n)$ اجرا شده و حلقه بیرونی با تقسیم شمارنده بر 2 به صورت $O(\log_2^n)$ اجرا می‌شود و چون دو حلقه متداخل هستند، جواب برابر حاصل ضرب این دو مقدار یعنی $O(\log_3^n \times \log_2^n)$ می باشد.

خواص سیگما

در بعضی از مسائل نیاز است که خواص $\sum$ را بدانید.

$$\sum_{i=a}^{b} c = (b-a+1)\times c \qquad \sum_{i=1}^{n} n = n^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1 \qquad \sum_{i=1}^{n} i2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$$

$$\sum_{i=0}^{n} k^i = \frac{k^{n+1}-1}{k-1} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^k \approx \frac{n^{k+1}}{k+1}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} k^i = \frac{k^n-1}{k-1} - 1 \qquad \sum_{i=1}^{n-1} ik^{i-1} = \frac{nk^{n-1}}{k-1} + \frac{1-k^n}{(k-1)^2}$$

$$\sum_{i=0}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \qquad \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} (i+1)(n-i) = \frac{n(n-1)(n+4)}{6} \qquad \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) = \frac{n(n-1)(n+1)}{6}$$

مثال

مرتبه اجرایی دستور ;x=x+1 کدام است؟

```
for ( t =1 ; t <= n–1 ; t++)
{
 for ( i=1 ; i<= n–t ; i++)
     { j= i+t;
         for ( k= i ; k<= j-1; k++)
             x=x+1}
}
```

حل:

$$\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-t}\sum_{k=i}^{j-1}1=\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-t}(j-1-i+1)=\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-t}(i+t-1-i+1)$$

$$=\sum_{t=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-t}t=\sum_{t=1}^{n-1}t(n-t)=\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$$

بنابراین مرتبه $O(n^3)$ است.

چند مثال از کاربرد سیگما

for (i=1; i<= n ; i++)
  for (j=1; j<= n ; j++){
      x=x+1;
      x=x+1;
   }
	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}2 = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}1 = 2\sum_{i=1}^{n}n = 2n\sum_{i=1}^{n}1 = 2n\times n = 2n^2$

for (i=1; i<= n ; i++)
  for (j=1; j<= i ; j++)
      x=x+1;
	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}1 = \sum_{i=1}^{n}i = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

for (k=0; k<= n-1 ; k++)
  for (i=1; i<= n-k ; i++)
      x=x+1;
	$\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-k}1 = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k) = \sum_{k=0}^{n-1}n - \sum_{k=0}^{n-1}k = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

for (i=1; i<=n^3; i++)
  for (j=1; j<=i ; j++)
      x=x+1;
	$\sum_{i=1}^{n^3}\sum_{j=1}^{i}1 = \sum_{i=1}^{n^3}i = \frac{n^3(n^3+1)}{2} \in O(n^6)$

for (i=1; i<=n^2; i++)
  for (j=1; j<=log n ; j++)
      x=x+1;
	$\sum_{i=1}^{n^2}\sum_{j=1}^{\log n}1 = \sum_{i=1}^{n^2}\log n = \log n\sum_{i=1}^{n^2}1 = n^2\times\log n$

مثال

تعداد اجرای دستور ;x=x+1 کدام است؟

```
for (i=1;  i<=3 ; i++)
   for (j=1; j<= i ; j++)
      for (k=1; k<= j ; k++)
         for (m=1; m<=k ; m++)
               x=x+1;
```

حل: دستور در داخل چهار حلقه وابسته قرار دارد، بنابراین تعداد اجرای آن برابر است با:

$$\binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{2!\times 4!} = 15$$

نمادهای θ,Ω

جهت نمایش مرتبه اجرایی می توان از نمادهای اومگای بزرگ (Ω) و تتا (θ) نیز استفاده کرد.

بـه‌جای Ω از $\geq$ ، به جای θ از $=$ و به جای O از $\leq$ استفاده کرد.

عبارتهای زیر برقرار است:

$$5n^2 \in \theta(n^2) \quad 5n^2 \in \Omega(n^2) \quad 5n^2 \in O(n^2)$$

$$n \in O(n^2) \quad n^2 + 10n \in \Omega(n^2) \quad n^3 \in \Omega(n^2)$$

$$n! = o(n^n) \quad \lg(n!) = \theta(n \lg n) \quad n^2 \sin n \in \Omega(n)$$

$$5n + 3\lg n + 10n\lg n + 7n^2 \in \theta(n^2) \quad \log_2^n \in \theta(\log_{10}^n)$$

مثال

رشد مجانبی تابع $\sum_{i=1}^{n} i^2$ و $\sum_{i=1}^{n} i^3$ را به دست آورید.

حل:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \theta(n^3) \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \theta(n^4)$$

رشد مجانبی تابع $\sum_{i=1}^{n} i^k$ برابر $\theta(n^{k+1})$ می باشد.

مثال

رشد مجانبی تابع $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} i^2 j^3$:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} i^2 j^3 = \sum_{i=0}^{n} i^2 \sum_{j=0}^{n} j^3 = \theta(n^3)\theta(n^4) = \theta(n^7)$$

مثال

رشد مجانبی تابع $\sum_{i=0}^{n} 3^i \times i^8$ را به دست آورید.

$$\sum_{i=0}^{n} 3^i \times i^8 \le \sum_{i=0}^{n} 3^i \times n^8 = n^8 \sum_{i=0}^{n} 3^i = n^8 \times \frac{3^{n+1}-1}{3-1} \le n^8 3^n \Rightarrow \sum_{i=0}^{n} 3^i \times i^8 = O(3^n n^8)$$

مثال

رشد مجانبی تابع $\sum_{i=0}^{n} 2^i$:

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1 = \theta(2^n)$$

رشد مجانبی تابع $\sum_{i=0}^{n} k^i$ برابر $\theta(k^n)$ می باشد.

مثال

رشد مجانبی تابع $\sum_{i=0}^{\lg n} \lg(\frac{n}{2^i})$ را به دست آورید.

$$\sum_{i=0}^{\lg n} \lg n - \sum_{i=0}^{\lg n} \lg 2^i = \lg n \sum_{i=0}^{\lg n} 1 - \sum_{i=0}^{\lg n} i = \lg n(\lg n + 1) - \frac{\lg n(\lg n + 1)}{2} = \frac{\lg n(\lg n + 1)}{2} = \theta(\lg^2 n)$$