Data Structure

Dr. Rastgoo

فصل ۲:

زیر برنامه های بازگشتی

زیر برنامه های بازگشتی

زیر برنامه بازگشتی (Recursive)، زیربرنامه ای است که حاوی حداقل یک دستور باشد که خود زیربرنامه را صـدا بزنـد. ایـن زیربرنامه به تعداد مراحل محدودی اجرا می‌شود و پس از آن متوقف می‌شود.

به طور نمونه زیربرنامه بازگشتی زیر را در نظر بگیرید:

$$f(n) = \begin{cases} n \times f(n-1) & n > 1 \\ 1 & n = 1 \end{cases}$$

این زیربرنامه، فاکتوریل عدد n را محاسبه می کند. به طور نمونه برای محاسبه f(3) داریم:

$$f(3) = 3 * f(2)$$
$$f(2) = 2 * f(1)$$

که با جایگذاری داریم:

$$f(1) = 1$$
$$f(2) = 2*1=2$$
$$f(3) = 3*2=6$$

زیر برنامه های بازگشتی معروف

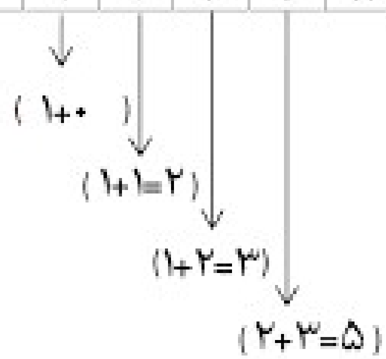
۱- محاسبه n امین جمله سری فیبوناچی

$$f(n)=\begin{cases} n & n=0, n=1 \\ f(n-1)+f(n-2) & n>1 \end{cases}$$

دو جمله اول سری فیبوناچی0 و1 می باشند و جملات بعدی از جمع دو جمله قبلی محاسبه می شوند:

0 , 1 , 1 , 2 , 3 , 5 , 8 , 13 , 21 , 34 , 55 , ...

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	$...F_n$
۰	۱	۱	۲	۳	۵	۸	۱۳	۲۱	۳٤	۵۵	۸۹	



$$F_n = (F_{n-1}) + (F_{n-2})$$

۲- مجموع اعداد 1 تا n

$$f(n)=\begin{cases}1 & n=1\\ n+f(n-1) & n>1\end{cases}$$

۳- توان (a^b)

$$f(a,b)=\begin{cases}a & b=1\\ a*f(a,b-1) & b>1\end{cases}$$

۴- خارج قسمت تقسیم صحیح $(a \ \ div \ \ b)$

$$f(a,b)=\begin{cases}0 & a<b\\ f(a-b,b)+1 & a\ge b\end{cases}$$

۵- باقیمانده تقسیم صحیح $(a \mod b)$

$$f(a,b)=\begin{cases} a & a<b \\ f(a-b,b) & a\geq b \end{cases}$$

۶- ترکیب $\binom{a}{b}$

$$f(a,b)=\begin{cases} 1 & a=b \quad or \quad b=0 \\ f(a-1,b)+f(a-1,b-1) \end{cases}$$

۷- بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م)

$$f(a,b)=\begin{cases} b & a\geq b, a \bmod b=0 \\ f(b,a) & a<b \\ f(b, b \bmod a) \end{cases}$$

۸- آکرمان

$$f(a,b)=\begin{cases} b+1 & a=0 \\ f(a-1,1) & b=0 \\ f(a-1,f(a,b-1)) & a\neq 0, b\neq 0 \end{cases}$$

مثال

با توجه به تابع فیبوناچی، خروجی $f(4)$ را بدست آورید؟

حل:

$$f(4) = f(3) + f(2)$$
$$f(3) = f(2) + f(1)$$
$$f(2) = f(1) + f(0)$$

که با جایگذاری داریم:

$$f(0) = 0$$
$$f(1) = 1$$
$$f(2) = 1+0=1$$
$$f(3) = 1+1=2$$
$$f(4) = 2+1=3$$

مثال

با توجه به تابع مجموع اعداد **1** تا **n** ، مقدار $f(3)$ چه خواهد بود؟

حل:

$$f(3) = 3 + f(2)$$
$$f(2) = 2 + f(1)$$

که با جایگذاری داریم:

$$f(1) = 1$$
$$f(2) = 2 + 1 = 3$$
$$f(3) = 3 + 3 = 6$$

بنابراین $f(3)$ برابر 6 خواهد شد.

تذکر: البته می دانیم که مجموع اعداد 1 تا n برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ می باشد و می توان مستقیما در این رابطه به جای **n** عـدد **3** را قرار داد.

مثال

با توجه به تابع توان، خروجی f (2,3) را بدست آورید؟

حل:

f (2,3) = 2*f (2,2)
f (2,2) = 2*f (2,1)

که با جایگذاری داریم:

f (2,1)=2
f (2,2)=2*2=4
f (2,3)=2*4=8

بنابراین f(2,3)=8 . در واقع تابع f(a,b) ، a را بتوان b می رساند.

مثال

با توجه به تابع خارج قسمت تقسیم صحیح ، خروجی f(5,2) را بدست آورید؟

حل:

$$f(5,2)=f(3,2)+1$$
$$f(3,2)=f(1,2)+1$$

که با جایگذاری داریم:

$$f(1,2)=0$$
$$f(3,2)=f(1,2)+1=0+1=1$$
$$f(5,2)=f(3,2)+1=1+1=2$$

در واقع تابع f(a,b) ، مقدار a div b را محاسبه می کند. (خارج قسمت تقسیم صحیح)

مثال

با توجه به تابع باقیمانده تقسیم صحیح، خروجی $f(5,2)$ را بدست آورید؟

حل:

$f(5,2)=f(3,2)$
$f(3,2)=f(1,2)$

با جایگذاری داریم:

$f(1,2)=1$ و $f(3,2)=1$ و $f(5,2)=1$

مثال

با توجه به تابع ترکیب، مقدار $f(4,2)$ کدام است؟

حل:

$$f(4,2) = f(3,2) + f(3,1)$$
$$f(3,2) = f(2,2) + f(2,1)$$
$$f(3,1) = f(2,1) + f(2,0)$$
$$f(2,1) = f(1,1) + f(1,0)$$

که با جایگذاری داریم:

$$f(2,1) = 1+1=2$$
$$f(3,1) = 2+1=3$$
$$f(3,2) = 1+2=3$$
$$f(4,2) = 3+3=6$$

مثال

با توجه به تابع بزگترین مقسوم علیه مشترک(ب.م.م)، حاصل $f(18,4)$ را بدست آورید؟

حل:

چهار مرتبه تابع f برای محاسبه $f(18,4)$ صدا زده می شود:

$$f(18,4) = f(4,2) = f(2,0) = f(2,0) = 2$$

در واقع تابع، بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد 18 و 4 را که برابر 2 می باشد را محاسبه می‌کند.

مثال

با توجه به تابع آکرمان، مقدار $f(1,1)$ کدام است؟

حل:

$$f(1,1) = f(0,f(1,0))$$
$$f(1,0) = f(0,1)$$

که با جایگذاری داریم:

$$f(0,1) = 2$$
$$f(1,0) = 2$$
$$f(1,1) = f(0,2) = 3$$

رابطه مقابل در تابع آکرمان برقرار است: $f(1,n)=n+2$

مثال

با توجه به تابع آکرمان، حاصل $f(1,2)$ کدام است؟

حل: با توجه به نکته قبل داریم : $f(1,2)=4$

روش دوم:

$$f(1,2)=f(0,f(1,1))=f(0,3)=4$$

در تابع آکرمان روابط زیر برقرار است:

$$f(1,n) = 2 + (n+3) - 3$$

$$f(2,n) = 2(n+3) - 3$$

$$f(3,n) = 2^{n+3} - 3$$

$$f(4,n) = \underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{n+3} - 3$$

مثال :

$$f(4,1) = 2^{2^{2^{2}}} - 3 \quad , \quad f(4,3) = 2^{65536} - 3$$

مثال

با توجه به تابع زیر، حاصل $f(18)$ را بدست آورید؟

$$f(a)=\begin{cases}0 & a=1\\ f\left(\left\lfloor \frac{a}{2}\right\rfloor\right)+1 & a>1\end{cases}$$

حل:

$f(18)=f(9)+1$
$f(9)=f(4)+1$
$f(4)=f(2)+1$
$f(2)=f(1)+1$

که با جایگذاری داریم:

$f(2)=0+1=1 \quad , f(4)=1+1=2 \quad , f(9)=2+1=3 \quad , \ f(18)=3+1=4$

در واقع تابع داده شده ، کف لگاریتم n در پایه 2 را محاسبه می کند.($\left\lfloor \log_2^{18} \right\rfloor = 4$)

مثال

مقدار $f(1,1)$ را با توجه به رابطه های بازگشتی زیر بدست آورید.

$$F(x,0)=F(x+1,0) + F(x+1,1) \qquad , \text{if } x<3$$
$$F(x,1)=2F(x+1,0) + F(x+1,1) \qquad , \text{if } x<3$$
$$F(3,0)=1$$
$$F(3,1)=0$$

حل:

$$f(1,1) = 2f(2,0) + f(2,1) = 2+2=4$$
$$f(2,0) = f(3,0) + f(3,1) = 1+0=1$$
$$f(2,1) = 2f(3,0) + f(3,1) = 2+0=2$$

توابع بازگشتی

به توابعی که بر اساس شرایطی که دارند مجددا خود را فراخوانی می کنند گفته می شود.

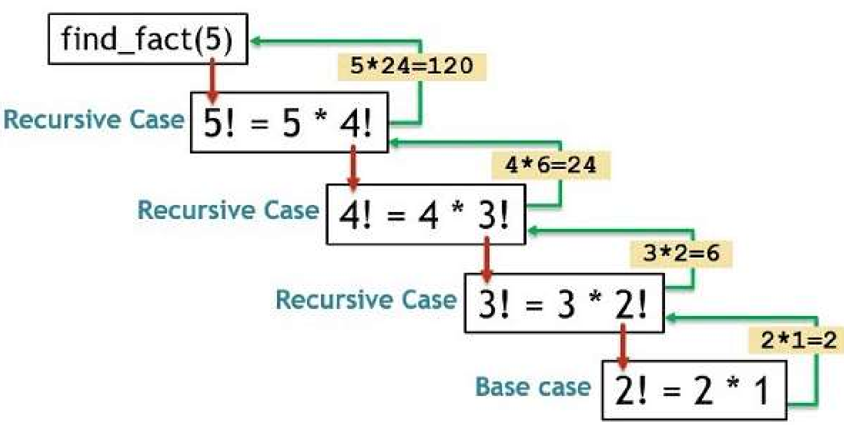
نحوه ی تعریف این توابع به فرم زیر است :

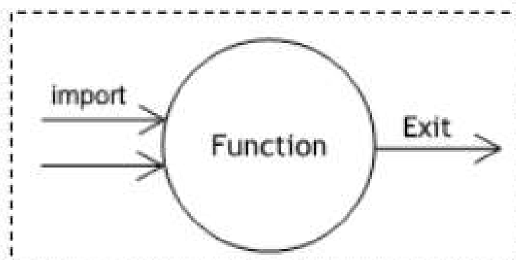
(ورودی ها) نام تابع --example--> f (x , y)

{

.....

}





ویژگی توابع بازگشتی

۱- از معایب توابع بازگشتی این است که در نهایت سادگی حجم زیادی را اشغال کرده و نسبتا کند عمل می کنند و نیز؛ در زمان پردازش cpu را درگیر می کنند.

۲- خود را فراخوانی می کنند.(تعداد دفعاتی که خود را فراخوانی می کند باید محدود باشد.بدیهی است که در غیر این صورت اجرای آن خاتمه نمی یابد.)

۳- دارای شرط خاتمه می باشد.

مرتبه اجرایی توابع بازگشتی

مثال

یک رابطه بازگشتی برای تعداد ضرب ها در تابع فاکتوریل بنویسید.

```
int  fact (int n){
   if (n==0)
      return  1;
   else
      return   n*fact(n-1);
}
```

حل: برای یک n معین تعداد ضرب هایی که انجام می شود برابر است با تعداد ضرب های انجام شده در فراخوانی (n-1) به اضافه عمل ضرب n در fact(n-1) . بنابراین اگر تعداد ضرب های انجام شده برای یک مقدار معین n را با $T(n)$ نمایش دهیم، داریم:

$$T(n) = 1 + T(n-1)$$
$$T(0) = 0$$

چنین معادله ای را معادله بازگشتی می گویند. در این الگوریتم وقتی n=0 باشد هیچ ضربی صورت نمـی گیـرد. لـذا T(0)=0 شرط اولیه است.

برای حل این معادله چند مقدار اولیه می دهیم تا به عملکرد آن پی ببریم:

$$T(1) = 1 + T(0) = 1 + 0 = 1$$

$$T(2) = 1 + T(1) = 1 + 1 = 2$$

$$T(3) = 1 + T(2) = 1 + 2 = 3$$

نتیجه می شود که: $T(n) = n$. بنابراین $T(n)$ از مرتبه o(n) است.

مثال

بازگشتی $T(n) = T(n-2) + 1$ را با فرض $T(0) = 0$ حل کنید.(n مضربی از 2 است)

حل: چند مقدار اولیه عبارتند از:

$T(2)=T(0)+1=0+1=1$
$T(4)=T(2)+1=1+1=2$
$T(6)=T(4)+1=2+1=3$

نتیجه می شود که: $T(n) = \frac{n}{2}$.

مثال

بازگشتی $T(n)=n+T(n-1)$ را با فرض $T(1)=1$ حل کنید.

حل:

$$\mathrm{T}(1)=1$$

$$T(2)=2+T(1)=2+1$$

$$T(3)=3+T(2)=3+2+1$$

...

$$T(n)=n+(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1=\frac{n(n+1)}{2}$$

تابع مجموع اعداد 1 تا n را محاسبه و از مرتبه $o(n^2)$ می باشد.

قضیه اصلی

اگر داشته باشیم: $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$ و با فرض $a \geq 1, b > 1$ ، آنگاه :

$$T(n) = \begin{cases} \theta(n^{\log_b^a}) & f(n) < n^{\log_b^a} \\ \theta(f(n).\lg n) & f(n) = n^{\log_b^a} \\ \theta(f(n)) & f(n) > n^{\log_b^a} \end{cases}$$

مثال

مرتبه اجرایی رابطه بازگشتی $T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + n$ کدام است؟

حل: داریم $f(n) = n, b = 3, a = 9$. پس: $n^{\log_3^9} = n^2$.

از آنجا که $f(n) < n^2$، با توجه به حالت اول قضیه اصلی، داریم: $T(n) = \theta(n^2)$.

مثال

مرتبه اجرایی رابطه بازگشتی $T(n) = T(\frac{2n}{3}) + 1$ کدام است؟

حل: داریم $f(n) = 1, b = \frac{3}{2}, a = 1$ و بنابراین داریم: $n^{\log_{3/2}^1} = n^0 = 1$.

از آنجا که $f(n) = n^{\log_b^a}$، با توجه به حالت دوم قضیه اصلی، داریم: $T(n) = \theta(\lg n)$.

مثال

مرتبه اجرایی رابطه بازگشتی $T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + n \lg n$ کدام است؟

حل: داریم $a = 3, b = 4$ و $f(n) = n \lg n$ و بنابراین داریم: $n^{\log_4^3} = O(n^{0.793})$.

از آنجا که $f(n) \geq n^{\log_4^3}$، با توجه به حالت سوم قضیه اصلی، داریم: $T(n) = \theta(n \lg n)$

رابطه بازگشتی	مرتبه اجرایی
$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + \lg n$	$f(n) = \lg n < n^{\log_2^4} \Rightarrow T(n) = \theta(n^2)$
$T(n) = 8T(\frac{n}{9}) + n\lg n$	$f(n) = n\lg n > n^{\log_9^8} \Rightarrow T(n) = \theta(n\lg n)$
$T(n) = T(\frac{2n}{3}) + 1$	$f(n) = 1 = n^{\log_{3/2}^1} \Rightarrow T(n) = \theta(\lg n)$
$T(n) = 9T(\frac{n}{3}) + n$	$f(n) = n < n^{\log_3^9} \Rightarrow T(n) = \theta(n^2)$
$T(n) = 3T(\frac{n}{4}) + n\lg n$	$f(n) = n\lg n > n^{\log_4^3} \Rightarrow T(n) = \theta(n\lg n)$
$T(n) = 8T(\frac{n}{4}) + 5n^2$	$f(n) = 5n^2 > n^{\log_4^8} \Rightarrow T(n) = \theta(n^2)$
$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n^3$	$f(n) = n^3 > n^{\log_2^2} \Rightarrow T(n) = \theta(n^3)$
$T(n) = 7T(\frac{n}{3}) + n^2$	$f(n) = n^2 > n^{\log_3^7} \Rightarrow T(n) = \theta(n^2)$
$T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + n^2$	$f(n) = n^2 < n^{\log_2^7} \Rightarrow T(n) = \theta(n^{\lg 7})$
$T(n) = 16T(\frac{n}{4}) + n^2$	$f(n) = n^2 = n^{\log_4^{16}} \Rightarrow T(n) = \theta(n^2 \lg n)$

تبصره قضیه اصلی

در قضیه اصلی ، اگر $\frac{f(n)}{n^{\log_b^a}} < n^{\varepsilon}$ باشد، (یعنی f(n) به صورت چند جمله ای از $n^{\log_b^a}$ بزرگتر نباشد) آنگـاه نمـی تـوان از قضیه اصلی استفاده کرد. در این حالت اگر f(n) از مرتبه $n^{\log_b^a}.\lg^k n$ باشد، آنگاه مرتبه T(n) برابر $n^{\log_b^a}.\lg^{k+1} n$ اسـت.

در زیر چند مثال آورده شده است:

مرتبه اجرایی	رابطه بازگشتی
$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n\lg n$	$\frac{n\lg n}{n} = \lg n < n^{\varepsilon} \Rightarrow T(n) = \theta(n\lg^2 n)$
$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2 \lg n$	$\frac{n^2 \lg n}{n^2} = \lg n < n^{\varepsilon} \Rightarrow T(n) = \theta(n^2 \lg^2 n)$
$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n^2 \lg^3 n$	$\frac{n^2 \lg^3 n}{n^2} = \lg^3 n < n^{\varepsilon} \Rightarrow T(n) = \theta(n^2 \lg^4 n)$