Data structure

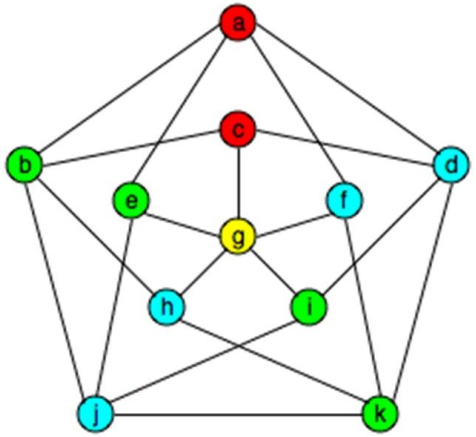
DR RASTGOO

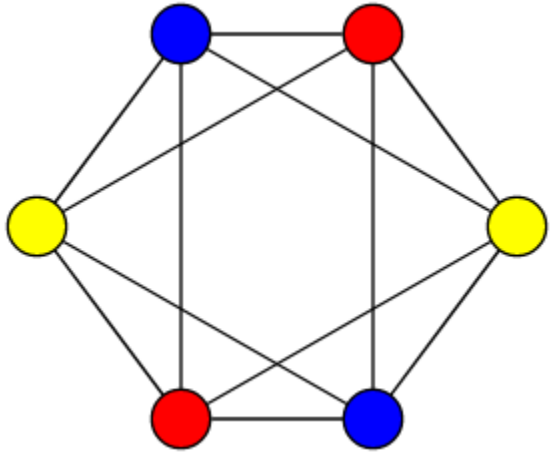
فصل ۹:

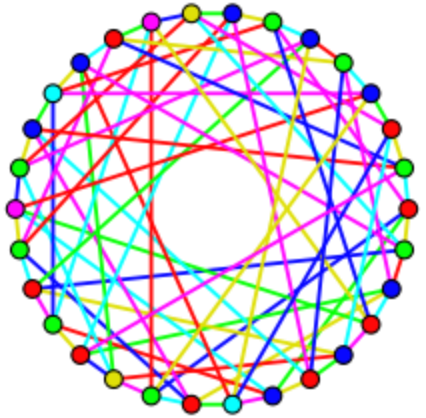
گراف

گراف

گراف G، شامل دو مجموعه V و E است. V مجموعه محدود و غیرتهی از رئوس و E مجموعه‌ای از زوج رئوس (که یال نامیده می شود) است. گراف با عبارت $G = (V,E)$ مشخص می شود.



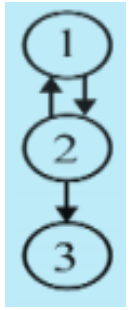




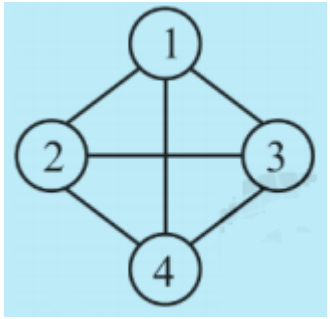
گراف را می توان به دو نوع تقسیم کرد:

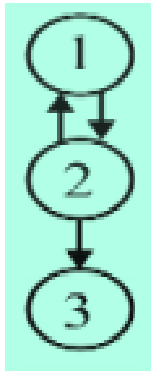
۱- گراف جهت‌دار

گرافی که در آن ترتیب گره‌ها در زوج مرتب اهمیت داشته باشد، یعنی زوجهای <v1,v2> و<v2,v1> دو یال متفاوت را نمایش دهند.

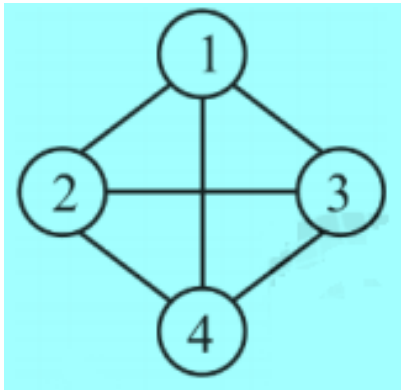


۲- گراف غیر جهت‌دار : گرافی که در آن جای دو رأس در مجموعه یالها اهمیت نداشته باشد.





V (G2) = {1,2,3} , E (G2) = { <1,2>,<2,1>, <2,3> }



V (G1) = {1,2,3,4}

E (G1) = { (1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4) }

- درجه یک گره، تعداد یالهای گذرنده از آن می باشد.

- تعداد یالها در هر گرافی برابر $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} d_i$ می باشد. (d_i: درجه رأسi) (n: تعداد رئوس)

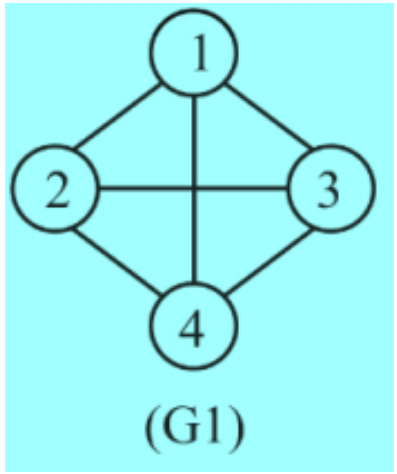
- تعداد گره ها با درجه فرد در یک گراف بدون جهت، همواره عددی زوج می باشد.

- در یک گراف جهت دار، گره با درجه خروجی مثبت و درجه ورودی صفر را گره منبع و گره با درجه ورودی مثبت و درجه خروجی صفر را گره چاه می نامند.

- مسیری که همه رئوس آن مجزا باشند، بجز (احتمالا) اولی و آخری را مسیر ساده می گویند.

- یک مسیر ساده که اولین و آخرین راس آن یکسان باشد را حلقه می گویند.

مثال

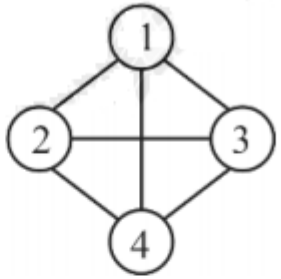
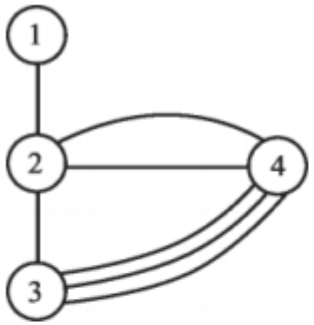
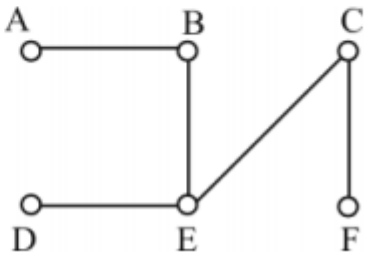


مسیر $3 \to 4 \to 2 \to 1$، یک مسیر ساده با طول 3 در G1 می باشـد.

مسـیر $1 \to 3 \to 2 \to 1$ یـک حلقـه بـه طول 3 در G1 است.

انواع گراف

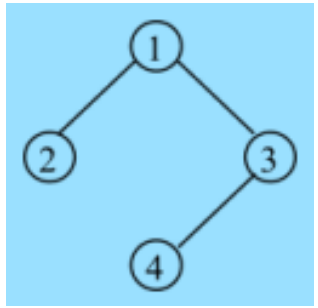
گراف ساده	گرافی که طوقه و یال موازی نداشته باشد.
گراف چند گانه (Multi Graph)	گرافی که در آن یالهای چندگانه (Multi Edge) مجاز باشد.
گراف کامل	گراف بدون جهتی که همه یالهای آن رسم شده باشد.
گراف وزن دار(شبکه)	گرافی که به هر یال آن یک مقدار عددی نسبت داده شده باشد.
گراف درختی	گرافی که حلقه نداشته باشد.
گراف همبند (متصل)	گرافی که یک مسیر بین هر دو گره آن وجود داشته باشد.
گراف همبند قوی	گراف جهت‌داری که برای هر زوج گره v,u هم یک مسیر از u به v و هم یک مسیر از v به u وجود داشته باشد.

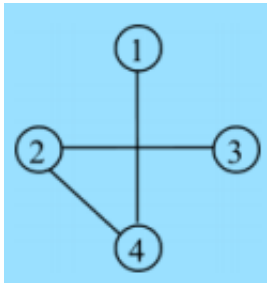
گراف کامل		گراف چند گانه	
گراف درختی		گراف ناهمبند	

یالهای متمایز که نقاط پایانی یکسانی را به هم وصل می کنند، را یالهای چند گانه می گویند.

در گراف کامل، درجه هر یک از گره ها برابر n-1 و تعداد یالهای آن برابر $\frac{n(n-1)}{2}$ می باشد.

گراف مکمل یک گراف، هیچ یال مشترکی با گراف ندارد و مجموع دو گراف، یک گراف کامـل خواهـد بود. گرافهای زیر مکمل یکدیگرند :





نمایش گراف

یک گراف را می توان به روشهای زیر نمایش داد:

۱- ماتریس مجاورتی

۲- لیستهای مجاورتی

۳- لیستهای مجاورتی معکوس

۴- لیستهای مجاورتی چند گانه

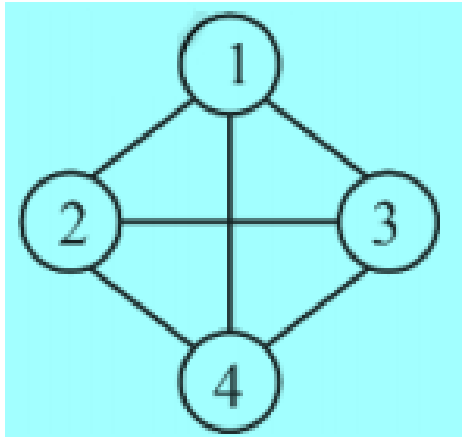
ماتریس مجاورتی

ماتریس مجاورتی گراف G=(V,E) با n راس، آرایه‌ای n×n به نام A می‌باشد که بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{cases} A[i,j]=1 & (Vi,Vj)\in E(G) \\ A[i,j]=0 & (Vi,Vj)\notin E(G) \end{cases}$$

مثال

ماتریس مجاورتی گراف زیر را بدست آورید.

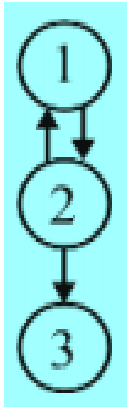


	1	2	3	4
1	0	1	1	1
2	1	0	1	1
3	1	1	0	1
4	1	1	1	0

- درجه هر رأس مانند i در گراف بدون جهت، مجموع تعداد یکهای موجود در سطر i ماتریس است
- تعداد یکهای ماتریس مجاورتی گراف بدون جهت، همواره دو برابر تعداد یال ها می باشد.
- ماتریس هم جواری گراف بدون جهت، متقارن است ولی برای گراف جهت‌دار، لزوماً متقارن نمی باشد.
- تمامی درایه های ماتریس همجواری گراف کامل به غیر از قطر اصلی برابر یک می باشند.

مثال

ماتریس مجاورتی گراف جهت دار زیر را بدست آورید.



	1	2	3
1	0	1	0
2	1	0	1
3	0	0	0

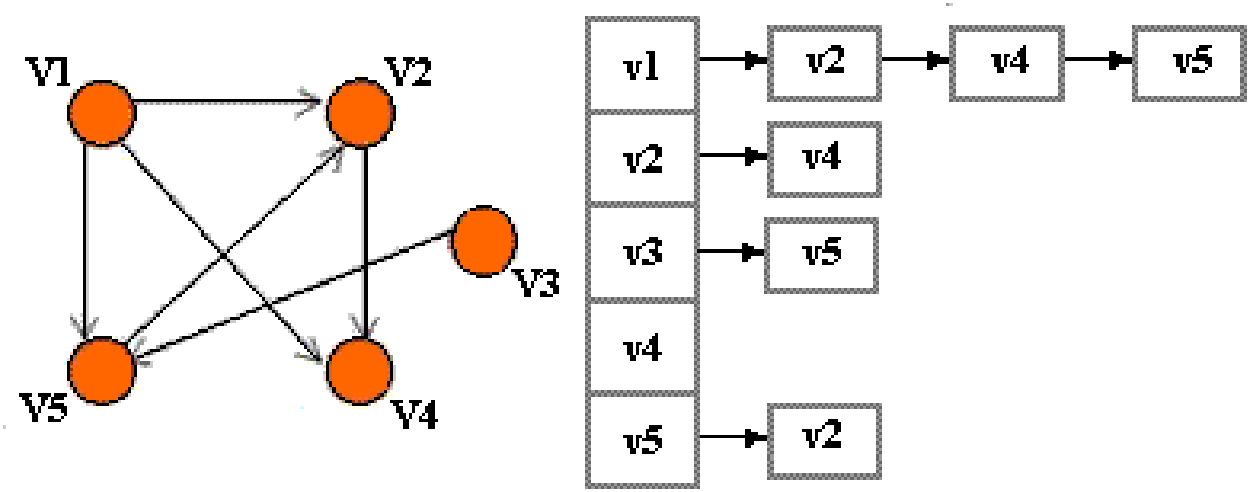
- تعداد یک های ماتریس مجاورتی گراف جهت دار، همواره برابر تعداد یال ها می باشد.

- در یک گراف جهت‌دار، درجه خروجی هر رأس، مجموع عناصر سطری آن و درجه ورودی هر رأس، مجموع عناصر ستونی آن رأس می‌باشد.

- اگر در ماتریس همجواری، درایه واقع در سطر و ستون یک گره برابر یک باشد، یک طوقه در آن گره وجود دارد.(طوقه یعنی حلقه به طول یک)

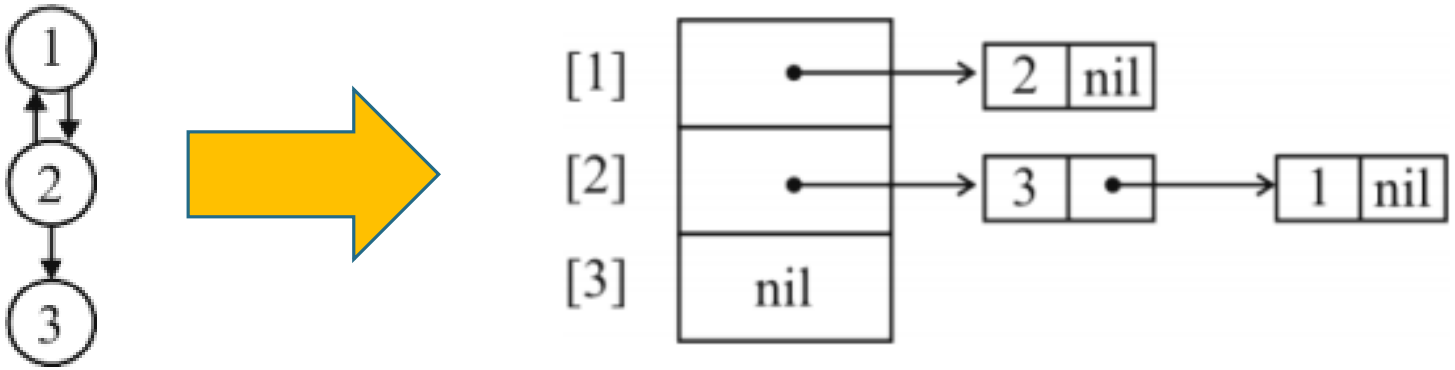
لیستهای مجاورتی (Adjacency List)

در این روش نمایش برای هر گره در گراف یک لیست وجود دارد و اشاره‌گر شروع این لیستها در یک آرایه قرار دارنـد. لیسـت سطر i حاوی رئوسی است که از گره i به آنها مسیری به طول یک وجود دارد.

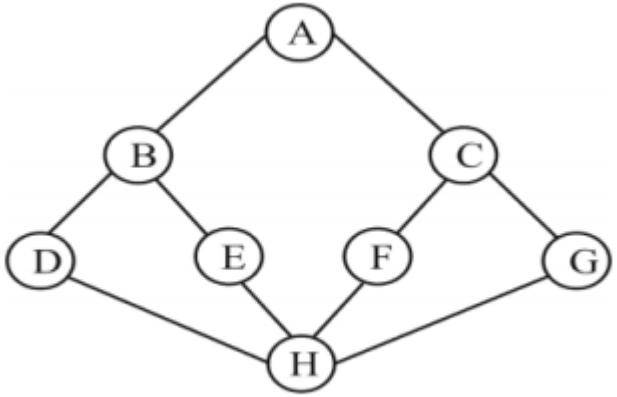


مثال

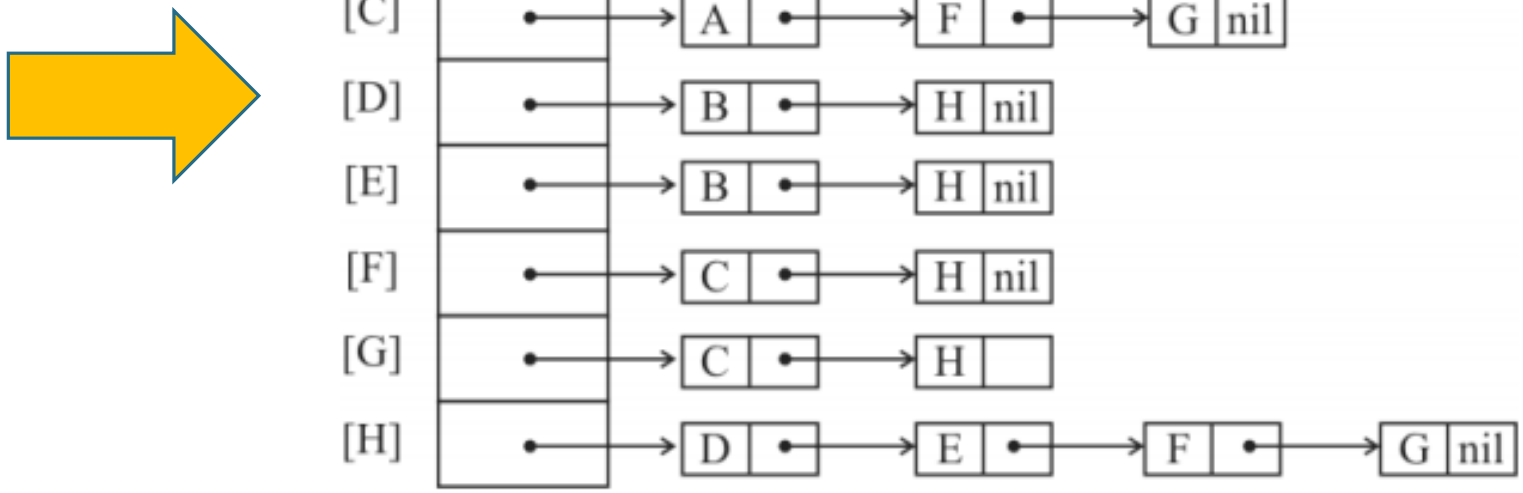
لیست مجاورتی گراف داده شده را رسم نمایید.



مثال


A
B
C
D
E
F
G
H

G


[A]
B
C
nil
[B]
A
D
E
nil
[C]
A
F
G
nil
[D]
B
H
nil
[E]
B
H
nil
[F]
C
H
nil
[G]
C
H
[H]
D
E
F
G
nil

- درجه هر راس در یک گراف غیر جهت‌دار را می‌توان با شمارش تعداد گره‌های متناظر آن در لیست مجاورتی تعیین کرد.

- اگر تعداد یالها در یک گراف زیاد باشد، از روش ماتریس مجاورتی و اگر تعداد یالها کم باشد از روش لیست مجاورتی جهت نمایش گراف استفاده می شود.

- برای نمایش گراف $G=(V,E)$ به روش لیست همجواری، فضای مصرفی برابر با $O(|E|+|V|)$ می باشد.

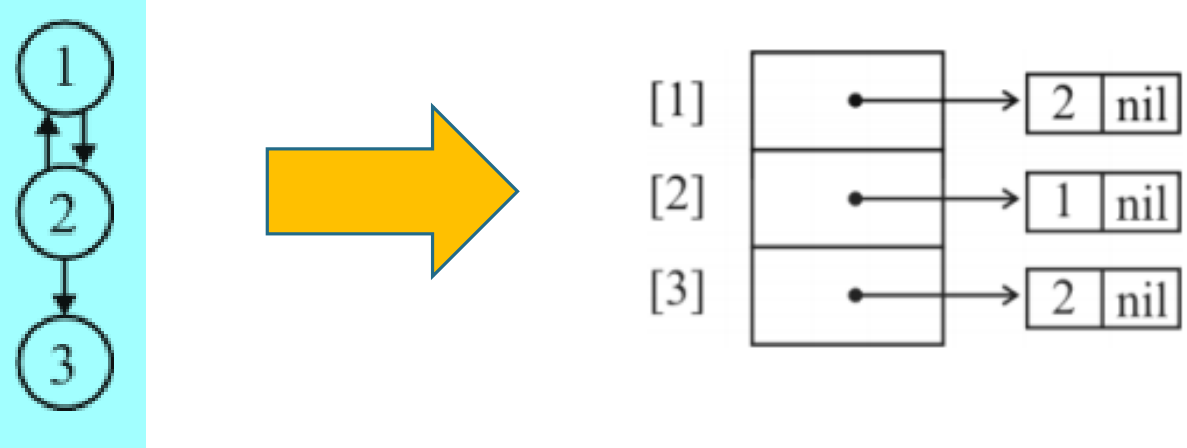
لیستهای مجاورتی معکوس

لیست مجاورتی معکوس مشابه لیست مجاورتی است، با این تفاوت که در لیست سطر i، رئوسی قرار می‌گیرند که از آنها به گره i ، مسیری به طول یک وجود دارد. توسط لیست مجاورتی معکوس می توان به سادگی درجه ورودی یک راس را مشخص کرد.

در گراف بدون جهت، لیست مجاورتی و لیست مجاورتی معکوس یکسان می‌باشند.

مثال

لیست مجاورتی معکوس گراف زیر را رسم نمایید.



معکوس یک گراف

برای بدست آوردن معکوس گراف جهت دار G که آن را با $\widetilde{G}$ نمایش می دهند، کافی است که جهت یالها را در G معکـوس می کنیم.

اگر A ماتریس همسایگی گراف جهت دار G باشد، آنگاه ترانهاده A یعنی A^T، ماتریس همسایگی گراف $\widetilde{G}$ می باشد.

پیمایش گراف

پیمایش یک گراف به منظور ملاقات کلیه گره‌های آن انجام می‌گیرد و به دو طریق ممکن می باشد:

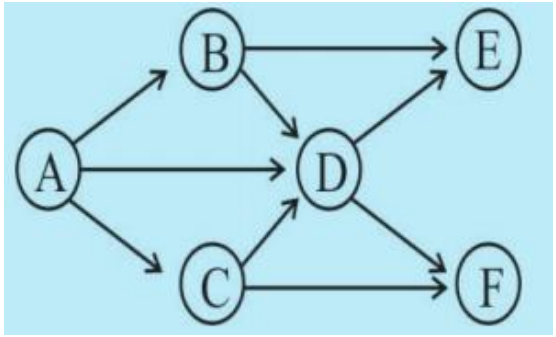
۱- عمقی (پیمایش اول ـ عمق) (DFS : Depth First Search)

۲- سطحی(پیمایش اول- عرض) (BFS : Breadth First Search)

در پیمایش DFS از پشته و در پیمایش BFS از صف استفاده می‌شود.

پیمایش سطحی (BFS)

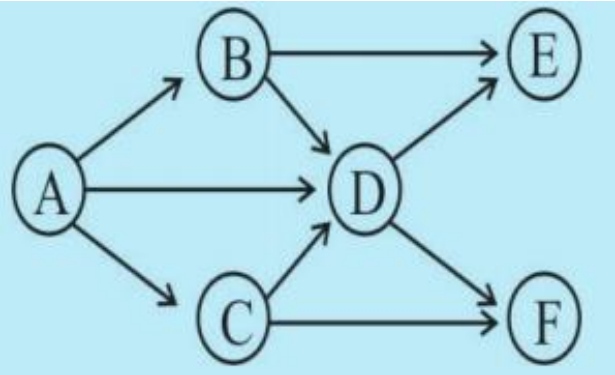
پیمایش سطحی منحصر به فرد نیست.



ABCDEF , ADBCEF , ADBCFE

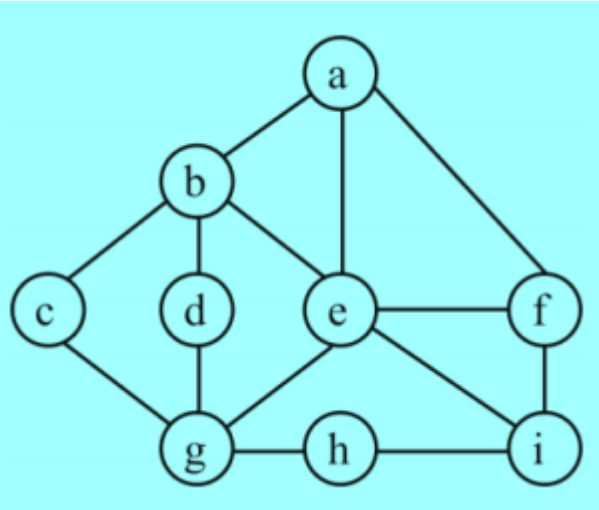
پیمایش عمقی (DFS)

پیمایش عمقی منحصر به فرد نیست.



ABEDFC , ABDFEC , ADEFBC

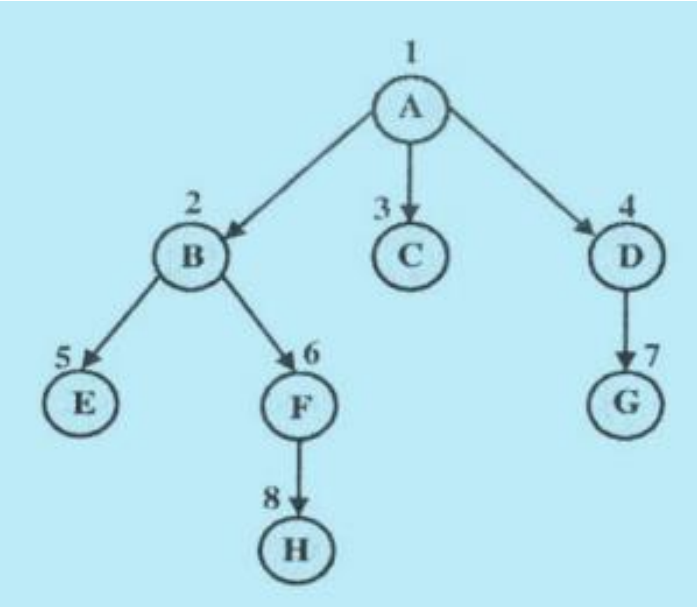
مثال



BFS : a b e f c d g i h

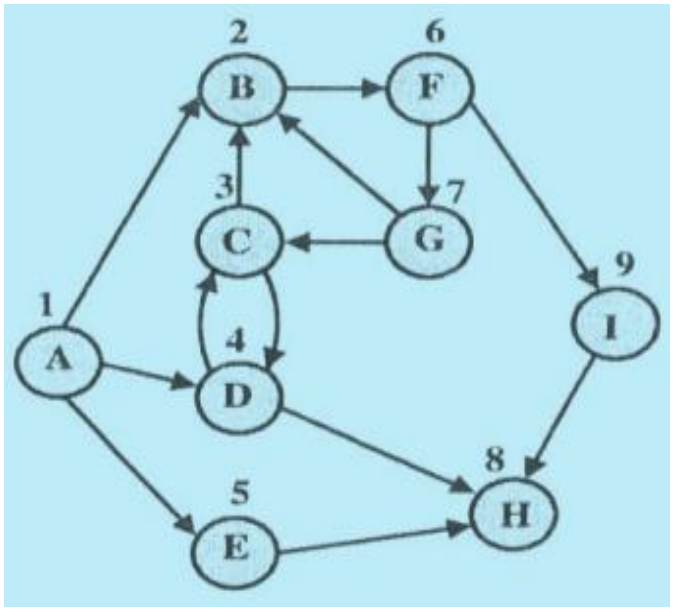
DFS : a b c g d e f i h

مثال



DFS ABEFHCDG

مثال



BFS : ABDEFCHGI

DFS : ABFIHGCDE

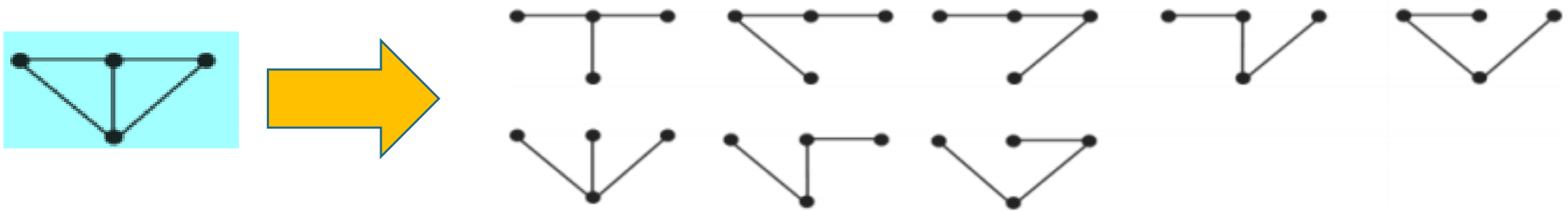
هزینه زمانی هر یک از پیمایش های BFS و DFS، گراف $G=(V,E)$ که به صورت ماتریس مجاورت بیان شده اسـت، برابر $|V|^2$ است و اگر به صورت لیست مجاورت بیان شده است، برابر $|E|$ است.

درخت پوشا (Spanning Tree)

درختی شامل تمامی رئوس گراف و تعدادی از لبه‌های گراف را درخت پوشای گراف می نامند.

درخت پوشای یک گراف بـا n گره، دارای حداقل n-1 یال است.

مثال



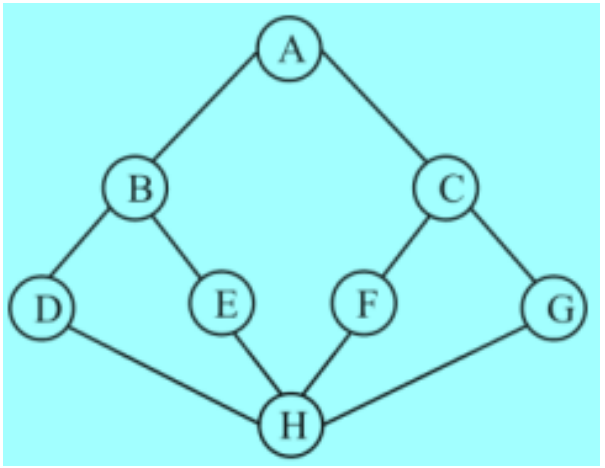
هر درخت فراگیر را می‌توان با حذف ۲ یال از ۵ یال گراف داده شده به دست آورد. این کار با ۱۰ روش انجام می‌شود اما ۲ تا از آنها منتهی به گراف ناهمبند می شوند.

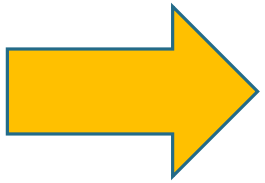
یک گراف کامل با n راس، حداقل دارای $2^{(n-1)} - 1$ درخت پوشا می باشد.

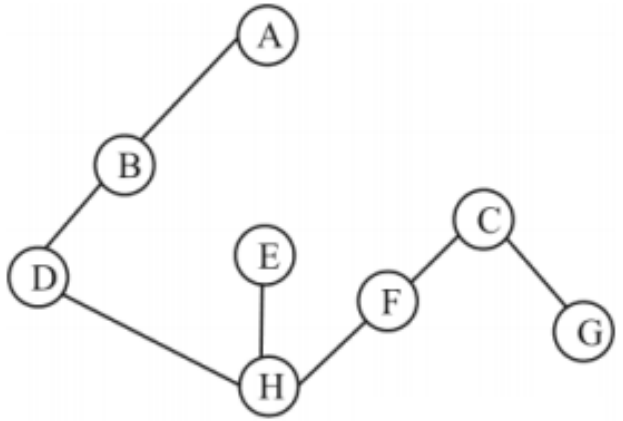
درخت پوشای حاصل از پیمایش عمقی گراف را درخت پوشای عمقی و درخت پوشای حاصل از پیمایش سطحی گـراف را درخت پوشای سطحی، می نامند.

مثال

درخت پوشای حاصل از جستجوی عمقی گراف G را بدست آورید؟





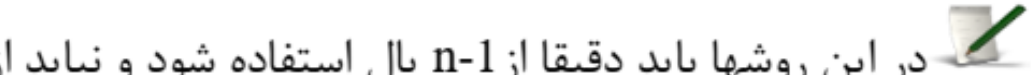


درخت پوشای حداقل (MST)

درخت پوشایی که در بین تمام درختهای پوشا ،دارای حداقل وزن باشد را MST می نامند.

الگوریتمهای به دست آوردن MST

۱- کراسکال(راشال) ۲- پریم ۳- سولین



در این روشها باید دقیقا از n-1 یال استفاده شود و نباید از یال هایی که حلقه تولید می کنند، استفاده کرد.

الگوریتم کراسکال

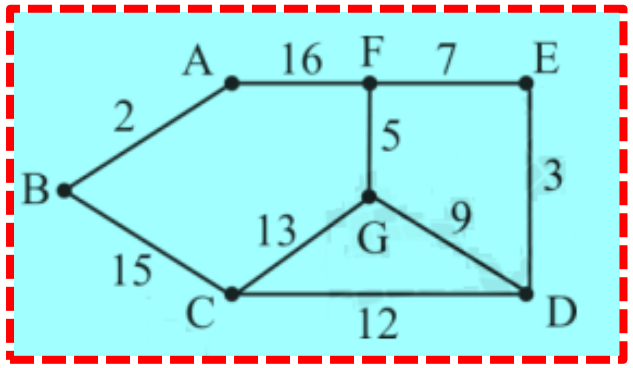
مراحل اجرای این الگوریتم به صورت زیر می باشد:

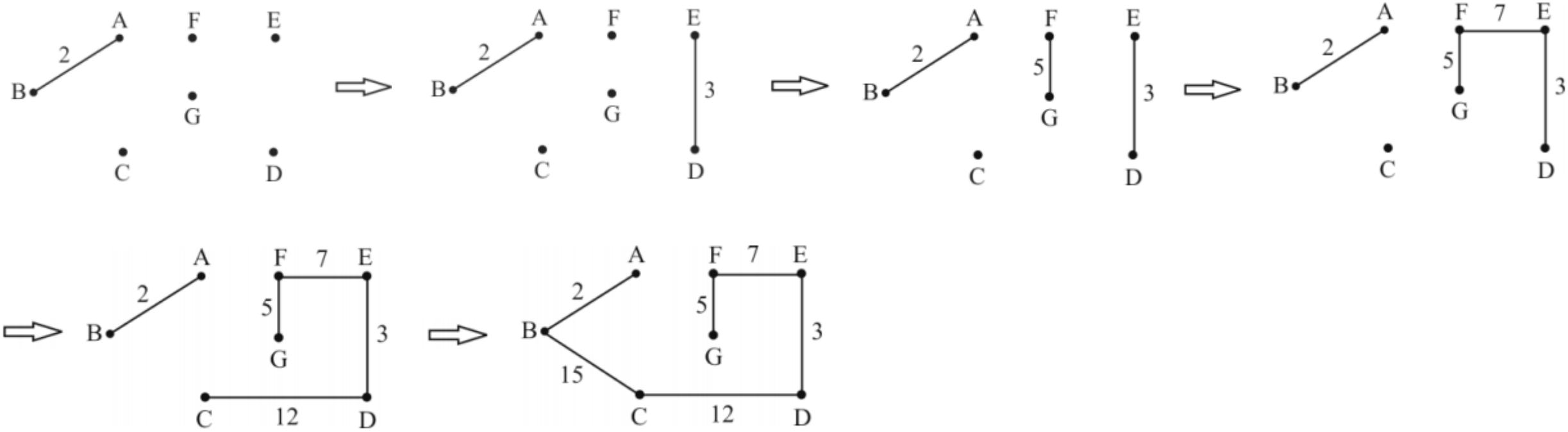
۱- مرتب کردن صعودی تمام یالها.

۲- مقدار دهی اولیه T ، به طوری که یک گراف متشکل از همان گره‌های G و بدون یال باشد.

۳- تکرار عملیات زیر به تعداد n-1 مرتبه:

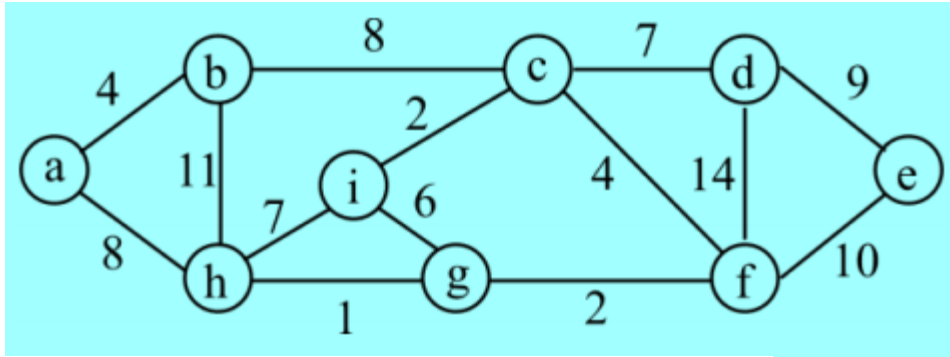
" به T یک یال از G با حداقل وزن اضافه کن به طوری که در T تشکیل حلقه ندهد."


A
16
F
7
E
2
5
3
B
13
G
9
15
C
12
D

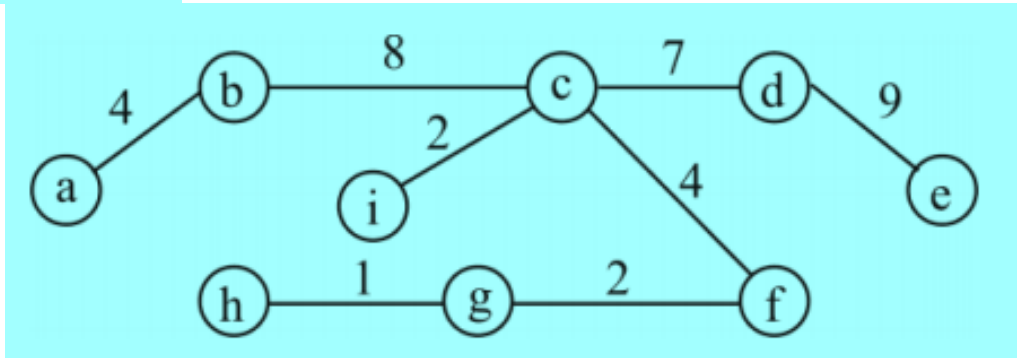

A
F
E
2
B
G
C
D
A
F
E
2
B
G
3
C
D
A
F
E
2
B
5
G
3
C
D
A
F
7
E
2
B
5
G
3
C
D
A
F
7
E
2
B
5
G
3
15
C
12
D

مثال

وزن درخت پوشای مینیمم گراف در صورت استفاده از الگوریتم کراسکال چه می باشد؟



1,2,2,4,4,7,8,9



37

درخت پوشای به دست آمده، منحصر به فرد نیست.

الگوریتم پریم

الگوریتم پریم نیز مشابه کراسکال، درخت پوشا با کمترین هزینه را لبه به لبه می سازد

با این تفاوت که یالی که در روش کراسکال اضافه می شود، می تواند به یالهایی که قبلا اضافه شده متصل نباشد، اما در پریم باید متصل باشد

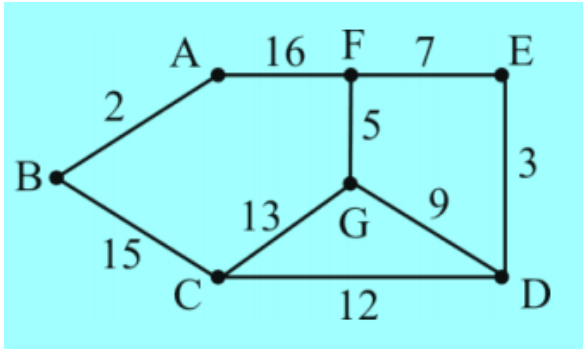
در روش پریم از یک گره شروع کرده و گره ای را به آن وصل می کنیم که نزدیکتر است. حال گره ای را که به یکی از این دو گره نزدیکتر است را وصل می کنیم.

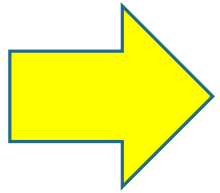
مرتبه اجرایی پریم برابر $o(n^2)$ و مرتبه اجرایی کراسکال برابر $o(e \times \log e)$ می باشد.

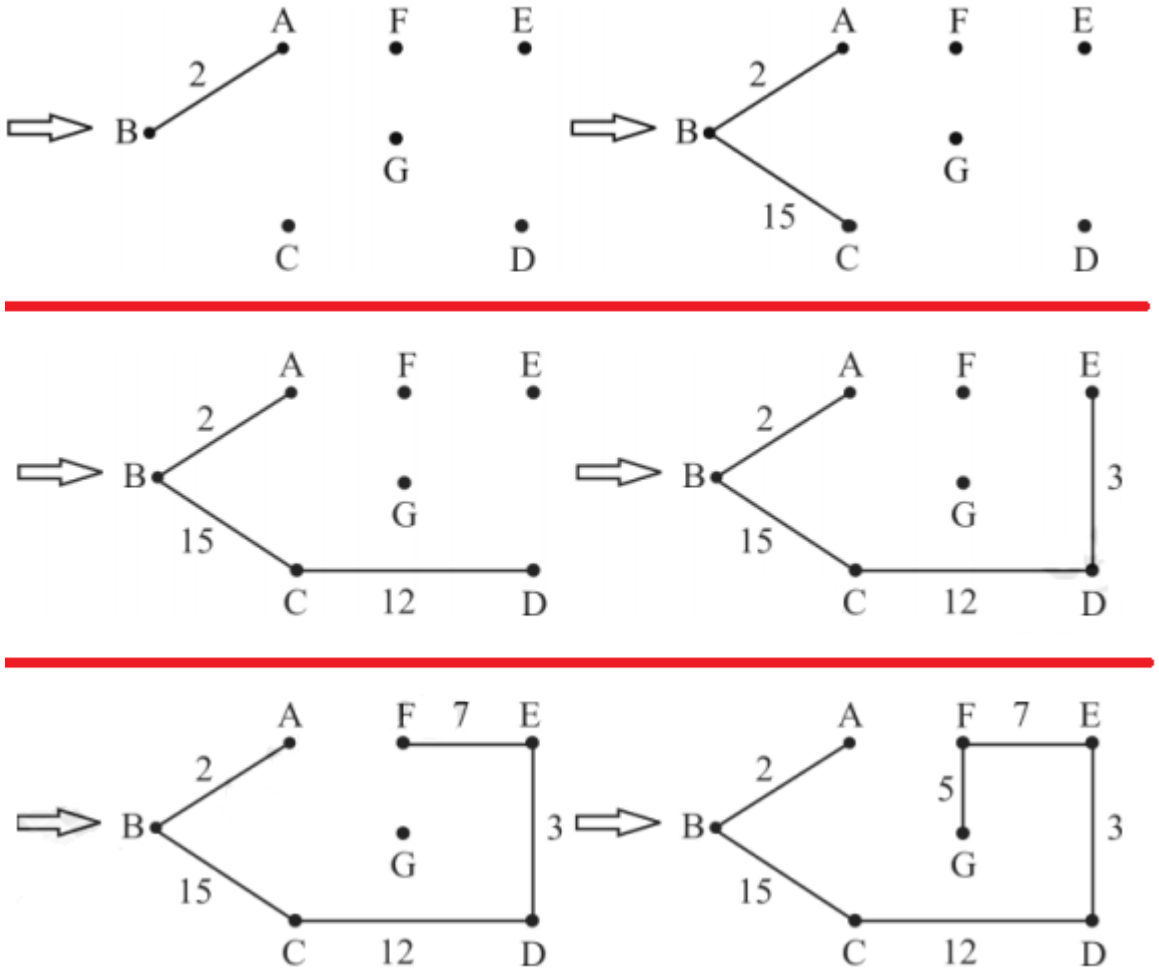
وزن درخت پوشای حداقل حاصل از هر یک الگوریتم های پریم یا کراسکال با هم برابر می باشد.

در هر یک از مراحل اجرای الگوریتم پریم، مجموعه لبه های انتخابی یک درخت را می سازند در حالی کـه در کراسـکال در هر لحظه، یک جنگل را می سازد.

مثال

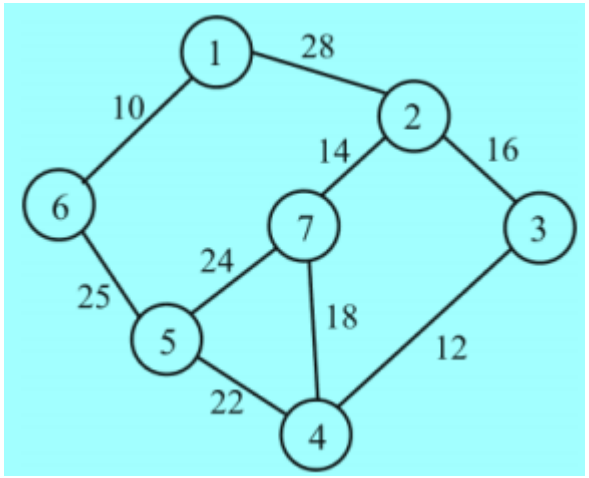






مثال

ترتیب اضافه شدن یالها را در صورت استفاده از الگوریتم پریم و کراسکال مشخص نمایید.



ترتیب اضافه شدن یالها در روش کراسکال برابر است با: 10,12,14,16,22,25

و در روش پریم برابر است با : 10,25,22,12,16,14

برای یافتن درخت پوشای حداقل یک گراف خلوت از الگوریتم کراسکال استفاده می شود. چون این الگوریتم بر پایه یالها کار می‌کند.(گراف خلوت، گرافی است که تعداد یالهای آن کم باشد.)

الگوریتم سولین

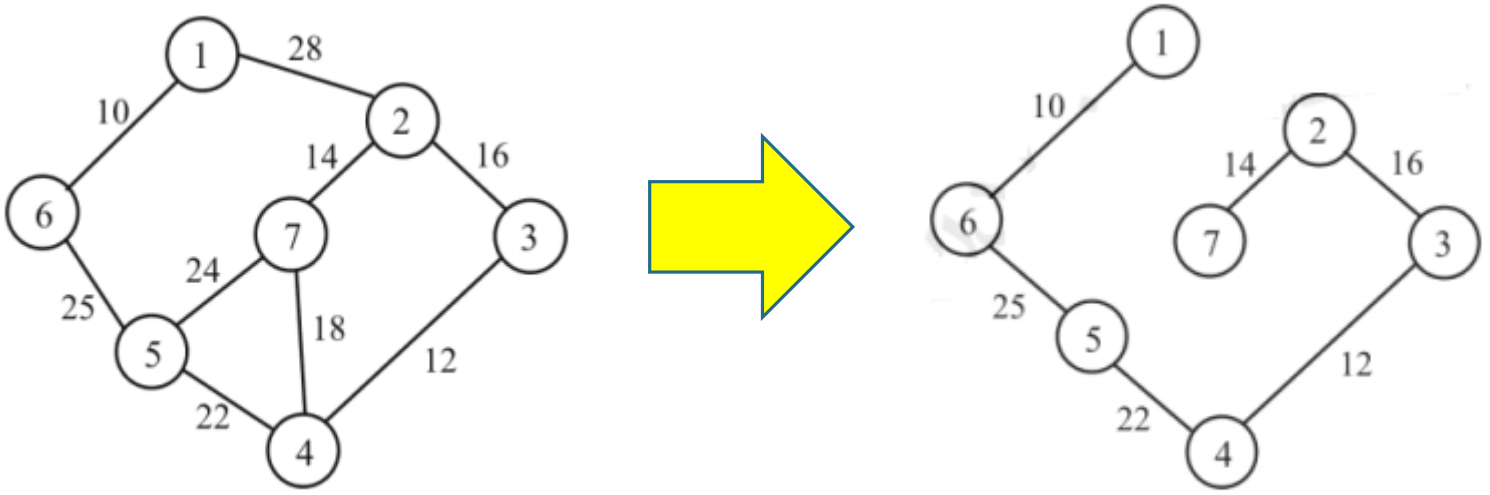
در این الگوریتم در هر مرحله چندین لبه انتخاب می شود.

در شروع هر مرحله، لبه های انتخابی، به همراه همه n گراف برداری، یک جنگل پوشا را تشکیل می دهند.

در طی هر مرحله، یک لبه برای هر درخت در این جنگل انتخاب می شود و این لبه، لبه ای با کمترین هزینه است که دقیقا یک بردار در درخت دارد.

مثال

درخت پوشای حداقل گراف زیر را با استفاده از الگوریتم سولین بدست آورید.



فرض کنیم گراف $G=(V,E)$ یک گراف بی‌جهت و M یک درخت فراگیر مینیمم برای G باشد، مسیر M بین هر جفت رأس V_1 و V_2 لزوما کوتاه‌ترین مسیر نمی‌باشد.